**Метод максимуму правдоподібності**

Математична статистика – це наука про те, як

1. планувати експеримент;
2. збирати статистичний матеріал;
3. аналізувати статистичний матеріал математичними методами;
4. робити прогнози.

Надалі будемо розкривати пункт 3, причому будемо розглядати статистичні методи для одновимірної кількісної мінливої величини.

Нехай  – ряд незалежних спостережень проведених в однакових умовах над статистичною змінною , що має функцiю розподiлу  залежну вiд  невiдомих параметрiв 

 (1)

**Задача**: оцiнити невiдомi параметри на основi вибiрки.

Англiйський статистик Р. Фiшер у 1912р. запропонував наступний метод оцiнки невiдомих параметрiв. Якщо статистична змiнна абсолютно неперервна i має густину, то розглядають таку фунцію:

. (2)

Якщо статична змiнна  дискретна i приймає значення з ймовiрнiстю  , (*j*=0,1,…), то розглядаємо функцiю

. (3)

В обидвох випадках функцiюназивають функцiєю **правдоподiбностi**. Невiдомi параметри оцiнюємо з необхiдної умови максумуму функцiї правдоподiбностi.

Очевидно, що необхiдною умовою максимуму функцiї багатьох змiнних є рівність нулю частинних похiдних вiд функцiї правдоподiбностi

.

Обидвi сторони останьої рiвностi помножимо на, одержимо:

. (4)

Остання система рiвнянь називається **системою рiвнянь правдоподiбностi**.

Кожне розв’язання системи рiвнянь правдоподiбностi, що залежить вiд вибiркових значень  називається **оцiнкою максимальної правдоподiбностi** для . Ми не будемо розглядати умов iснування розв’язку системи рiвнянь правдоподiбностi, їх єдиностi, а в конкретних випадках на цi питання дамо вiдповiдi по змозi i до кiнця.

Таким чином, метод максимуму правдоподiбностi полягає в тому, що за оцiнку невiдомих параметрiв приймаємо такi розв’язки системи (4), вiдносно , при яких функції (2), (3) досягають найбільшого значення.

**Приклад 1.** Методом максимуму правдоподiбностi оцiнити на основi заданої вибiрки параметри нормального розподiлу (сподiвання та диспер- сiю)

Нехай  вибiрка з нормальної популяцiї, що має густину

.

Для оцiнки невiдомих параметрiв  та  розглянемо функцiю правдоподiбностi:

.

Звідси

.

Запишемо систему рiвнянь правдоподiбностi:



Дана система має єдиний розв’язок:



.

Розв’язок єдиний, а чи вiн надає максимум.

Оскiльки,



i



то при  і  функцiя правдоподiбностi нормального розподiлу має максимум.

Таким чином максимум правдоподiбностi сподiвання нормального розподiлу оцiнюється середнiм арифметичним , а дисперсiя – другим центральним моментом, або варiансою наближення, .

**Приклад 2.** Методом максимуму правдоподiбностi оцiнити на основi вибiрки параметр експонентного розподiлу.

Нехай  - вибiрка з експонентної популяцiї, що має густину

.

**1-ий крок.** Записуємо функцiю правдоподiбностi: замiсть  ставимо  i перемножаємо:

.

**2-ий крок.** Логарифмуємо функцію *L*

.

Записуємо рiвняння правдоподiбностi

,

який має єдиний розв’язок , а чи надає максимуму функції *L*, то треба взяти другу похiдну:.. Оскільки друга похiдна вiд’ємна то маємо максимум.

Таким чином методом максимуму правдоподiбностi параметр експоненцiального розподiлу оцiнюється оберненою величиною середнього арифметичного.

**Приклад 3.** ММП оцiнити параметр розподiлу Пуассона на основi вибiрки (тобто знайти оцiнку для параметра ).

Нехай  - вибiрка з генеральної сукупностi пуассонiвської розподiленої змiнної

.

Функцiя правдоподiбностi у нашому випадку приймає вигляд

.

Звiдси

.

На підставі (4) записуємо рівняння правдоподібності



.

Це рiвняння має єдиний розв’язок при  ,

оскiльки , то при  функцiя правдоподiбностi пуассонiвського розподiлу має максимум.

Таким чином методом максимуму правдоподібності параметр розподілу пуассона на основі вибірки оцінюється середнім арифметичним.

**Зауваження.** Часто система рiвнянь правдоподiбностi трансцендентна i навiть за допомогою сучасних ЕОМ буває нелегко її розв’язати. В таких випадках iнколи вдається оцiнити невiдомi параметри методом моментiв. Метод моментiв полягає в тому, що ми прирiвнюємо мiж собою стiльки початкових теоретичних i емпіричних моментiв, скiльки невiдомих параметрiв.

**Приклад 4.** Оцiнити на основі вибірки методом максимуму правдоподiбностi параметр розподiлу  із заданою густиною

. 

Нехай  – вибiрка iз популяцiй, що має густину . Функцiя правдоподiбностi у нашому випадку буде

.

Звiдси



Рiвняння правдоподiбностi має вигляд

.

Логарифмiчна похiдна гама  - функції

,

при , монотонно зростає вiд  до . Тому рiвняння правдоподiбностi



має єдиний розв’язок



де  – функцiя обернена до . Оскiльки



i похiдна всюди невiд’ємна, то при 

функцiя правдоподiбностi має максимум. Але вираз досить складний для практичного застосування. Тому постараємось оцiнити невiдомий параметр  методом моментiв.

Перший початковий момент розподiлу (А) збiгається iз сподiванням i рiвний



Вiдомо, що перший емпiричний початковий момент збiгається iз середнiм арифметичним . Таким чином оцiнкою невiдомого параметра , згiдно з методом моментiв є вибiркове середнє



Ця оцiнка значно простiша вiд отриманої.

Слiд пiдкреслити, що оцiнка параметрiв одержанi ММП мають взагалi бiльше властивостей, нiж оцiнки одержанi методом моментiв.